2ο φυλλάδιο ασκήσεων-Πραματική Ανάλυση
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

1. Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, ισχύει ότι $\lim_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$; Ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη;

2. Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, να δειχθεί ότι $\lim_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.

3. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}dx = 0$.

4. Να δειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = nx/(1+nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ συγλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και ότι $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$.

5. Κατασκευάστε μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στην πραγματική ευθεία, οι οποίες να είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο, τέτοια ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή συνάρτηση.

6. Κατασκευάστε μία φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1)$, η οποία συγλίνει κατά σημείο σε μία συνεχή συνάρτηση, όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

9. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.

9. Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία συναρτήσεων σε κάποιο μετρικό χώρο (X,d) που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση f. Αν $\{x_n\}$ μία ακολουθία από τον X, τέτοια ώστε $x_n \to x \in X$, να δειχθεί ότι $f_n(x_n) \to f(x)$. Να δείξετε με ένα παράδειγμα ότι αν η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, τότε το προηγούμενο συμπέρασμα δεν ισχύει απαραίτητα.

10. Έστω μία ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η f_n να είναι μονότονη για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να υπάρχει το $\lim f_n(x)$, για κάθε $x \in A$, να δειχθεί ότι το $\lim f_n(x)$ υπάρχει για όλα εκτός από το πολύ αριθμήσιμου πλήθους $x \in \mathbb{R}$.